

*На правах рукописи*

БЕЙЛИН СЕРГЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

**Смешанные задачи  
с интегральными условиями  
для волнового уравнения**

*Автореферат*

*диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук*

*01.01.02 — Дифференциальные уравнения*

Казань — 2005

Работа выполнена на кафедре уравнений математической физики  
механико–математического факультета  
Самарского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико–математических наук,  
профессор Репин Олег Александрович  
Официальные оппоненты: доктор физико–математических наук,  
профессор Логинов Борис Владимирович  
доктор физико–математических наук,  
профессор Плещинский Николай Борисович  
Ведущая организация: Владимирский государственный  
педагогический университет

Защита состоится 29 ноября 2005 г. в 15:00 часов на заседании  
диссертационного совета К 212.081.06 при Казанском государствен-  
ном университете по адресу: 420008, г.Казань, ул.Университетская,  
17, НИИММ, ауд.324.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке  
им. Н.И.Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан 27 октября 2005г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
к.ф-м.н., доцент



Липачёв Е.К.

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Работа посвящена исследованию разрешимости нелокальных задач с интегральными условиями для волнового уравнения.

Исследование таких задач представляет интерес как с точки зрения развития общей теории дифференциальных уравнений с частными производными, так и с точки зрения приложений в математическом моделировании.

Нелокальные задачи являются непосредственным обобщением классических краевых задач, однако при их исследовании возникает ряд дополнительных трудностей. Спецификой нелокальных задач является несамосопряженность пространственного дифференциального оператора и, как следствие, неполнота системы собственных функций.

За последние несколько десятилетий в математической литературе появилось значительное количество публикаций, посвященных исследованию нелокальных задач. Большую роль в развитии этого направления сыграли статьи А.В.Бицадзе и А.А.Самарского «О некоторых простейших обобщениях эллиптических задач» (ДАН СССР, 1969, Т.185, № 4) и А.А.Самарского «О некоторых проблемах современной теории дифференциальных уравнений» (Дифференц. уравнения, 1980, Т.16, № 11), в которых были предложены новые постановки задач для уравнений в частных производных.

Для различных классов уравнений нелокальные задачи рассматривались А.А.Дезиным, Л.И.Камыниным, В.А.Ильиным, Е.И.Моисеевым, А.К.Гущиным, А.Л.Скубачевским, А.М.Нахушевым, В.И.Жегаловым, Т.Ш.Кальменовым, И.С.Ломовым, О.А.Репиным, Л.С.Пулькиной и другими авторами.

Среди нелокальных задач большой интерес представляют задачи с интегральными условиями. Такого рода условия встречаются, например, при математическом моделировании некоторых процессов теплопроводности, влагопереноса в капиллярно-пористых средах, процессов, происходящих в турбулентной плазме, при изучении задач мате-

математической биологии, а также при исследовании некоторых обратных задач математической физики.

Вопросы разрешимости задач с нелокальными интегральными условиями для уравнений с частными производными изучены в работах Дж.Кэннона, Л.И.Камынина, Н.И.Ионкина, Л.А.Муравья и А.В.Филиновского, Н.И.Юрчука, А.К.Гущина, А.Бузиани, Д.Г.Гордезиани и Г.А.Авалишвили, Л.С.Пулькиной. В большинстве этих работ рассмотрены задачи для уравнений параболического и эллиптического типов. Гораздо менее изучен вопрос о постановке и разрешимости задач с нелокальными интегральными условиями для гиперболических уравнений; причем смешанные задачи с интегральными условиями рассматривались в опубликованных к настоящему времени статьях лишь для случая одной пространственной переменной.

В предлагаемой работе рассматриваются смешанные задачи для волнового уравнения с классическими начальными условиями, а вместо граничных условий, или одного из них в одномерном случае, задано нелокальное условие, содержащее интегральный оператор.

Таким образом, актуальность темы диссертационной работы обоснована как потребностями теоретического обобщения классических задач, так и прикладным характером рассматриваемого класса нелокальных задач.

**Цель работы.** Постановка и исследование смешанных задач с нелокальными интегральными условиями для волнового уравнения, а также разработка методов исследования разрешимости поставленных задач.

**Общая методика исследования.** В работе используется аппарат теории дифференциальных уравнений в частных производных, методы функционального анализа, аппарат интегральных уравнений, методы априорных оценок, аппарат специальных функций.

**Научная новизна.** В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Доказана однозначная разрешимость смешанной задачи в прямоугольнике  $D$  с условием Неймана и нелокальным интегральным условием для уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} + c(x, t)u = f(x, t)$$

в пространстве Соболева  $W_2^1(D)$ .

2. Исследована однозначная разрешимость смешанной задачи в цилиндре  $Q_T$  с нелокальным интегральным условием для уравнения с  $n$  пространственными переменными

$$u_{tt} - \Delta u + c(x, t)u = f(x, t)$$

в пространстве Соболева  $W_2^{1,2}(Q_T)$ .

3. Разработаны методы построения классического решения смешанной задачи с условием Дирихле и нелокальным интегральным условием для уравнения колебаний струны. Этими методами установлена однозначная разрешимость поставленной задачи.
4. Доказано существование единственного классического решения нелокальной задачи с интегральным условием для уравнения с сингулярным коэффициентом. Выявлены условия на входящий в уравнение параметр, при выполнении которых часть границы свободна от задания условий на искомое решение.

**Теоретическая и практическая значимость.** Работа носит теоретический характер. Она является продолжением исследований нелокальных задач для гиперболических уравнений.

Полученные результаты и разработанные методы могут быть применены для решения и исследования нелокальных, а также некоторых обратных задач математической физики.

**Апробация работы.** Основные результаты были доложены на:

- научном семинаре кафедры уравнений математической физики механико–математического факультета Самарского государственного университета в 2001, 2003, 2004 и 2005гг. (руководитель — д.ф-м.н., профессор О.П.Филатов);
- межвузовской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи» в Самарском государственном техническом университете, Самара, 2001;
- втором Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике, Самара, 2001;
- международной конференции «Математическое моделирование, статистика и информатика», Самара, 2001;
- XXIV конференции молодых ученых механико–математического факультета МГУ, Москва, 2002;
- Воронежской весенней математической школе «Понтрягинские чтения», Воронеж, 2004;
- Воронежской зимней математической школе «Современные методы теории функций и смежные проблемы», Воронеж, 2005;
- научном семинаре Владимирского государственного педагогического университета в 2005г. (руководитель — д.ф-м.н., профессор В.В.Жиков);
- всероссийской конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» (СамДифф-2005), Самара, 2005.

**Публикации.** Автором опубликовано одиннадцать работ по теме диссертации, которые отражают ее основные результаты. Список публикаций приведен в конце автореферата. Статья [3] опубликована в соавторстве и её результаты принадлежат авторам в равной мере.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, трёх глав и списка литературы из 70 наименований, включая работы автора. Объем диссертации составляет 110 страниц машинописного текста.

## Основное содержание работы

**Первая глава** посвящена исследованию нелокальной задачи с интегральным условием для волнового уравнения.

В первом параграфе этой главы в прямоугольнике

$$D = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}, \quad T \leq l,$$

рассмотрено уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} + c(x, t)u = f(x, t) \quad (1)$$

с данными Коши

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (2)$$

граничным условием

$$u_x(0, t) = 0, \quad (3)$$

и нелокальным интегральным условием

$$\int_0^l K(x)u(x, t)dx = 0. \quad (4)$$

Изучается вопрос о существовании обобщенного решения из класса  $W_2^{1,2}(D)$ .

Введем понятие обобщенного решения задачи (1)–(2)–(3)–(4).

Пусть  $u(x, t)$  — решение поставленной задачи. Обозначим  $u_x(l, t) = p(t)$ . Из равенства (1) стандартным образом получим тождество, которое затем используем для определения обобщенного решения:

$$\int_0^T \int_0^l (u_x v_x - u_t v_t + c u v) dx dt = \int_0^T \int_0^l f v dx dt + \int_0^T p(t) v(l, t) dt, \quad (5)$$

где  $v(x, t)$  — произвольная функция из пространства  $\bar{W}_2^1(D) = \{v(x, t) : v(x, t) \in W_2^1(D), v(x, T) = 0\}$ .

Умножив теперь (1) на  $K(x)$  и проинтегрировав по  $x$  от 0 до  $l$ , получим равенство:

$$K(l)p(t) = \int_0^l (K'(x)u_x(x, t) + K(x)c(x, t)u(x, t)) dx - \int_0^l K(x)f(x, t)dx. \quad (6)$$

Отметим, что функция  $p(t)$  нам не известна, но входит в тождество (5). Поэтому будем искать сразу две функции:  $u(x, t)$  и  $p(t)$ . Введем в рассмотрение пространство

$$W_2^{1,2}(D) = \{u : u \in W_2^1(D), u_{tt} \in L_2(D)\}$$

с нормой

$$\|u\|^2 = \int_0^T \int_0^l (u^2 + u_t^2 + u_x^2 + u_{tt}^2) dxdt.$$

**Определение 1.** *Обобщенным решением задачи (1)–(2)–(3)–(4) будем называть пару функций  $(u, p)$  таких, что*

1.  $u(x, t) \in W_2^{1,2}(D)$ ,  $u(x, 0) = 0$ , и для произвольной  $v(x, t) \in \bar{W}_2^1(D)$  удовлетворяет тождеству (5);
2.  $p(t) \in L_2(0, T)$  и удовлетворяет равенству (6).

Основным результатом этого параграфа является следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Если  $f(x, t)$ ,  $f_t(x, t) \in L_2(D)$ ,  $\int_0^l K(x)f(x, 0)dx = 0$ ,  $K(x) \in C^1[0, l]$ ,  $K(l) \neq 0$ ,  $0 \leq c_0 \leq c(x, t) \leq c_1$ ,  $|c_t(x, t)| \leq c_2$ , то существует единственное обобщенное решение поставленной задачи (1)–(2)–(3)–(4).*

Доказательство единственности базируется на полученной в работе априорной оценке. Для доказательства существования решения

построена последовательность приближенных решений  $(u^m, p^m)$ , доказана ее сходимость и показано, что ее предел и является искомым обобщенным решением.

Во втором параграфе рассмотрено волновое уравнение

$$u_{tt} - \Delta u + c(x, t)u = f(x, t) \quad (7)$$

в цилиндре  $Q = \Omega \times (0, T)$ , где  $\Omega \in R^n$  — ограниченная область с гладкой границей, с начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (8)$$

и нелокальным интегральным условием

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S + \int_0^t \int_{\Omega} K(x, \xi, \tau) u(\xi, \tau) d\xi d\tau = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (9)$$

где

$$S = \partial\Omega \times (0, T)$$

— боковая поверхность цилиндра  $Q$ .

Обозначим  $\bar{W}_2^1(Q) = \{v(x, t) : v \in W_2^1(Q), v(x, T) = 0\}$ .

**Определение 2.** Обобщенным решением задачи (7)–(8)–(9) будем называть функцию  $u(x, t) \in W_2^1(Q)$ , удовлетворяющую для любой  $v \in \bar{W}_2^1(Q)$  следующему тождеству

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v - u_t v_t + cuv) dx dt + \\ & + \int_0^T \int_{\partial\Omega} v(x, t) \int_0^t \int_{\Omega} K(x, \xi, \tau) u(\xi, \tau) d\xi d\tau ds dt = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} f v dx dt + \int_{\Omega} \psi(x) v(x, 0) dx \quad (10) \end{aligned}$$

и начальному условию  $u(x, 0) = \varphi(x)$ .

Основным результатом этого параграфа является следующее утверждение.

**Теорема 2.** Если  $f(x, t) \in L_2(Q)$ ,  $\varphi(x) \in W_2^1(\Omega)$ ,  $\psi(x) \in L_2(\Omega)$ ,  $K(x, \xi, \tau)$  непрерывна по совокупности переменных и выполнены неравенства

$$0 \leq c_0 \leq c(x, t) \leq c_1, \quad |c_t(x, t)| \leq c_2,$$

$$\max_{\bar{Q}} |K| \leq K_0, \quad \max_{\bar{Q}} \left| \frac{\partial K}{\partial x_i} \right| \leq K_1, \quad i = 1, \dots, n,$$

то существует единственное обобщенное решение задачи (7)–(8)–(9).

Доказательство единственности обобщенного решения базируется на полученной в работе априорной оценке, а существование доказано методом Галёркина.

**Во второй главе** рассмотрена задача с условием Дирихле и интегральным нелокальным условием для уравнения колебаний струны.

В прямоугольнике  $D = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$  рассматривается уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t) \tag{11}$$

и ставится задача отыскания функции  $u(x, t) \in C^2(\bar{D})$ , которая удовлетворяет уравнению (11) и следующим условиям:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad u(0, t) = 0, \tag{12}$$

$$\int_0^1 u(x, t) dx = 0. \tag{13}$$

Попытка применить к поставленной задаче метод разделения переменных приводит к задаче Штурма–Лиувилля с интегральным условием. Область определения этого оператора не плотна в  $L_2(0, 1)$ , что делает невозможным построение сопряженного оператора, а следовательно, и пополнение системы собственных функций присоединенными.

В первом параграфе этой главы рассмотрен метод, базирующийся на эквивалентности поставленной задачи другой нелокальной задаче (с дискретными нелокальными условиями типа Бицадзе–Самарского).

**Лемма 1.** Пусть  $f(x, t) \in C(\bar{D})$ , а функции  $\varphi(x), \psi(x)$  удовлетворяют условию согласования:

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = \int_0^1 \psi(x) dx = 0.$$

Тогда задача (11)-(12)-(13) эквивалентна задаче для уравнения (11) с условиями (12) и условием типа Бицадзе-Самарского:

$$u_x(0, t) - u_x(1, t) = \int_0^1 f(x, t) dx. \quad (14)$$

Для этой задачи оказывается возможным пополнение системы собственных функций присоединёнными, в результате чего решение можно получить в виде биортогонального ряда.

Основным результатом этого параграфа является следующая

**Теорема 3.** Если  $\varphi(x) \in C^2[0, 1]$ , имеет кусочно–непрерывную производную третьего порядка,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi'(0) - \varphi'(1) = \int_0^1 f(x, 0) dx$ ,  $\varphi''(1) = -\int_0^1 f(x, 0) dx$ ;  $\psi(x) \in C^1[0, 1]$ , имеет кусочно–непрерывную производную второго порядка,  $\psi(0) = 0$ ,  $\psi'(0) - \psi'(1) = \int_0^1 f_t(x, 0) dx$ ;  $f(x, t) \in C^2(\bar{D})$ , имеет кусочно–непрерывную третью производную по  $t$ ,  $f(0, t) = -\int_0^1 f(x, t) dx$ ,  $f(1, t) = -\int_0^1 (f(x, t) + \frac{1}{2} f_{tt}(x, t)) dx$ , то существует единственное решение задачи (11)-(12)-(14)  $u(x, t) \in C^2(\bar{D})$ .

Во втором параграфе использован другой подход к исследованию поставленной нелокальной задачи. Он опирается на решение вспомогательной задачи для уравнения (11) с условиями (12) и условием  $u(l, t) = \mu(t)$ , где функция  $\mu(t)$  подлежит определению. Применяв к полученному решению вспомогательной задачи интегральное условие

(13), мы приходим к интегральному уравнению относительно неизвестной функции  $\mu(t)$ :

$$\mu(t) - \frac{4}{\pi} \int_0^t \mu(\tau) K(t, \tau) d\tau = g(t), \quad (15)$$

где

$$K(t, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin \frac{\pi(2k-1)(t-\tau)}{l},$$

$$g(t) = -\frac{8}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \int_0^t \int_0^l f(x, \tau) \sin \frac{\pi m(t-\tau)}{l} \sin \frac{\pi m x}{l} dx d\tau,$$

$$m = 2k - 1.$$

Уравнение (15) — уравнение Вольтерра второго рода с ограниченным ядром, которое однозначно разрешимо.

Предложенный в этом параграфе метод может быть применен и для исследования общих уравнений гиперболического типа.

**В третьей главе** изучена нелокальная задача с интегральным условием для уравнения  $S$

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{p}{x} u_x \quad (16)$$

в области  $D = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$  с начальными данными

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (17)$$

и нелокальным интегральным условием

$$\int_0^l K(x) u(x, t) dx = E(t), \quad (18)$$

где функции  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $E(t)$  — заданы, и выполняются условия согласования:

$$\int_0^l K(x) \varphi(x) dx = E(0), \quad \int_0^l K(x) \psi(x) dx = E'(0). \quad (19)$$

Изучаются вопросы о существовании ограниченного в  $D$  решения. Найдены условия на функцию  $K(x)$ , при которых задача оказывается разрешимой. Рассмотрен подробно случай  $K(x) = x^p$ . Показано, что при  $p \in [1, 3]$  часть границы свободна от задания краевых условий, при этом поставленная задача корректна. Если  $p \in (0, 1)$ , то для корректности задачи необходимо потребовать, чтобы на левой границе выполнялось условие  $u(0, t) = 0$ .

## Публикации автора по теме диссертации

- [1] Beilin S. Existence of solutions for one-dimensional wave equations with nonlocal conditions. // *Electronic Journal of Differential Equations*. 2001. Т. 2001. №76. С. 1–8.
- [2] Бейлин С.А. Единственность решения смешанной задачи с интегральным условием для гиперболического уравнения. // *Труды Второго Всероссийского симпозиума по прикладной и промышленной математике*. Самара. 2001. Т. 8. С. 392.
- [3] Бейлин С.А., Пулькина Л.С. Единственность решения смешанной задачи с интегральным условием для одного гиперболического уравнения. // *Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского*. Казань. 2001. Т. 11. С. 24–27.
- [4] Бейлин С.А. Смешанная задача с интегральным условием для волнового уравнения. // *Труды международной конференции “Математическое моделирование, статистика и информатика”*. Самара. 2001. С. 206–207.
- [5] Бейлин С.А. Смешанная задача с интегральным условием для неоднородного волнового уравнения. // *Труды XI межвузовской конференции “Математическое моделирование и краевые задачи”*. Самара. 2001. Т. 3. С. 24–27.
- [6] Бейлин С.А. Нелокальная задача с интегральным условием для одномерного волнового уравнения. // *Труды XXIV Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова*. Москва. 2002. Т. II. С. 24–27.
- [7] Бейлин С.А. Об одной нелокальной задаче с интегральным условием. // *Матем. заметки ЯГУ*. 2004. Т. 11. №2. С. 22–29.
- [8] Бейлин С.А. Об одном свойстве корней функции Бесселя  $J_\nu(x)$ . // *Вестник Самарского государственного технического университета*. 2004. Т. 30. С. 186–187.

- [9] Бейлин С.А. Нелокальная смешанная задача для одного гиперболического уравнения. // *Тезисы докладов всероссийской конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» (СамДифф-2005)*. Самара. 2005. С. 24–27.
- [10] Бейлин С.А. Об одной нелокальной задаче с интегральным условием для гиперболического уравнения. // *Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы Воронежской зимней математической школы*. Воронеж. 2005. С. 30–31.
- [11] Бейлин С.А. Смешанная задача с интегральным условием для волнового уравнения. // *Неклассические уравнения математической физики. Сборник научных работ*. Новосибирск. 2005. С. 37–43.

Подписано в печать 17.10.2005  
Гарнитура Квант Антика. Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Печать оперативная.  
Объем 16 с. Тираж 100 экз. Заказ №  
Отпечатано УОП СамГУ, 443011, Самара, ул.Академика Павлова, 1